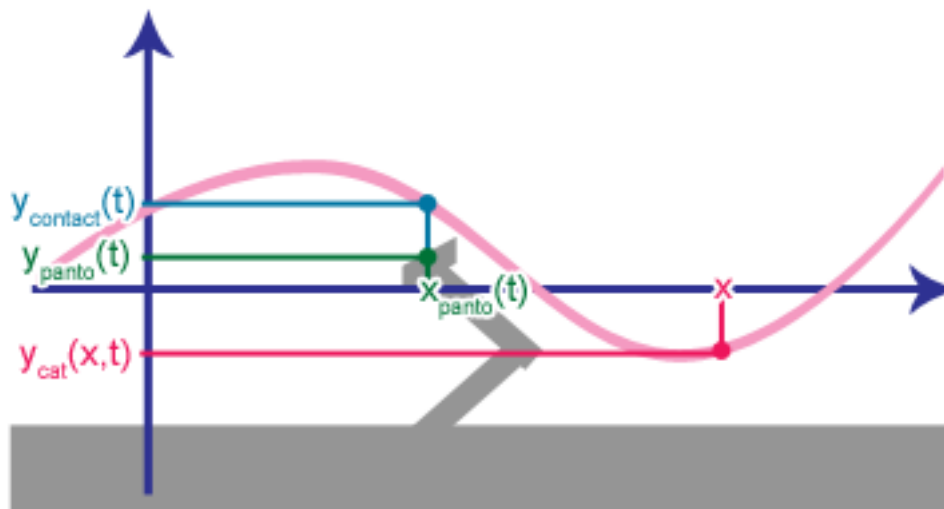


# Les Maths de « Chevaucher l'Onde »

## Définitions

Nous utilisons les désignations suivantes :

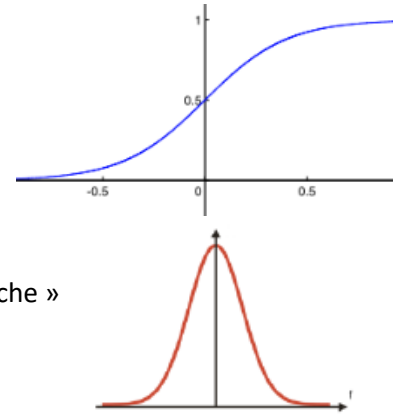
- $x$  : La position horizontale par rapport à un point fixe sur la caténaire non-excitée.
- $y$  : La position verticale par rapport à un point fixe sur la caténaire non-excitée.
- $t$  : Le temps
- $A$  : L'amplitude de l'onde
- $f$  : La fréquence de l'onde
- $v_{\text{train}}$  : La vitesse du train
- $c$  : La vitesse de propagation de l'onde sur la caténaire
- $\Delta v = c - v_{\text{train}}$  : La différence des deux vitesses
- $x_{\text{panto}}(t) = v_{\text{train}} \cdot t$  : La position  $x$  du pantographe au temps  $t$
- $\xi = x - x_{\text{panto}}(t)$  : La position horizontale *par rapport à la position du pantographe*. Nous appelons cela la **position relative**. Donc  $x = \xi + x_{\text{panto}}(t)$
- $y_{\text{cat}}(\xi, t)$  : L'écart vertical d'un point de la caténaire (fil conducteur) à la position relative  $\xi$  et au temps  $t$ . La valeur 0 correspond à la position « normale » de la caténaire.
- $y_{\text{contact}}(t) = y_{\text{cat}}(0, t)$  : L'écart vertical du point de la caténaire au-dessus du pantographe. Nous appellerons ce point le « **point de contact** » (qu'il y ait contact ou non).
- $y_{\text{panto}}(t) \leq y_{\text{contact}}(t)$  : L'écart vertical du point supérieur du pantographe au temps  $t$ .
- $Y_0$  : L'écart vertical  $y$  du pantographe sur lequel il serait en équilibre s'il n'y avait pas de caténaire.
- $k$  : La raideur du ressort du pantographe
- $m$  : La masse du pantographe (concentrée sur le point supérieur)



## Fonctions auxiliaires

Nous avons besoin de deux fonctions auxiliaires :

- $S(x) = 1/(1 + e^{-\lambda x})$  Une fonction sigmoïde utilisée pour pondérer des fonctions d'excitation telle qu'elles deviennent zéro « derrière » le pantographe. La valeur  $\lambda$  est une constante qui définit la transition : Des petites valeurs correspondent à une montée lente, des grandes valeurs à une montée rapide, avec des très grandes valeurs de  $\lambda$  on s'approche de la fonction Heavyside. Pour  $\lambda = 0$ ,  $S(x) \equiv 1/2$ .
- $B(x) = \begin{cases} \cos(\mu x) + 1 & : -\pi/\mu < x < \pi/\mu \\ 0 & : \text{Autrement} \end{cases}$  : Fonction « cloche » utilisée pour simuler un impulse singulier<sup>1</sup>. La valeur  $\mu$  est une constante qui définit la largeur de la cloche.



## Vibration sinusoïdale de la caténaire

Pour simuler la vibration sinusoïdale de la caténaire, nous partons d'une vibration sinusoïdale  $y_{cat}(x,t)$  sur tout le long de la caténaire qui se propage avec la vitesse  $c$  vers l'avant :

$$\begin{aligned} y_{cat}(\xi, t) &= A \cdot \sin(2\pi f(x-ct)) \\ &= A \cdot \sin(2\pi f(\xi + x_{panto}(t) - ct)) \\ &= A \cdot \sin(2\pi f(\xi + v_{train} \cdot t - ct)) \\ &= A \cdot \sin(2\pi f(\xi - \Delta vt)) \end{aligned}$$

Cependant, l'onde se propage seulement devant le train, derrière elle est plate. Il faudra donc pondérer l'onde avec notre fonction sigmoïde, ce qui donne

$$y_{cat}(\xi, t) = S(\xi) \cdot A \cdot \sin(2\pi f(\xi - \Delta vt))$$

Le point de contact suit la formule

$$y_{contact}(t) = y_{cat}(0, t) = S(0) \cdot A \cdot \sin(2\pi f(0 - \Delta vt)) = 1/2 \cdot A \cdot \sin(-2\pi f \Delta vt)$$

<sup>1</sup> La fonction  $(1+\cos(x))/2\pi$  sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  est une bonne approximation d'une « fonction en cloche » gaussienne.

## Impulse parcourant la caténaire

Pour simuler un impulse qui parcourt la caténaire vers l'avant, nous utilisons la fonction cloche B. Un impulse qui démarre à  $t=0$  au point  $\xi=0$  aurait la formule  $A \cdot B(\xi - ct)$ . Plus généralement, si l'impulse démarre au temps  $t_0$  au point  $\xi=0$ , on aurait la formule

$$y_{cat}(\xi, t) = A \cdot B(\xi - c(t-t_0))$$

Cependant, si on veut que l'impulse surgisse au pantographe au lieu d'arriver depuis l'arrière, il faudra de nouveau pondérer avec  $S(\xi)$  :

$$y_{cat}(x, t) = S(\xi) \cdot A \cdot B(\xi - c(t-t_0))$$

## Simulation du pantographe

S'il n'y avait pas de caténaire, le pantographe pourrait suivre librement un mouvement d'oscillateur harmonique<sup>2</sup> :

$$\ddot{y}_{panto} = -\frac{k}{m}(y_{panto} - Y_0)$$

Maintenant, la caténaire presse le pantographe vers le bas, donc en marche normale, son accélération est donnée par l'accélération  $\ddot{y}_{contact}$  du point de contact. Seulement quand ce point accélère trop vite vers le haut, le pantographe se décroche et se comporte en oscillateur harmonique, jusqu'au point où il rejoint de nouveau la caténaire.

Le pantographe suit donc trois règles :

1. Le pantographe ne traverse jamais la caténaire :  $y_{panto}(t) \leq y_{contact}(t)$
2. Quand le pantographe ne touche pas la caténaire, il se comporte en oscillateur harmonique :  
 $y_{panto}(t) < y_{contact}(t) \Rightarrow \ddot{y}_{panto} = -\frac{k}{m}(y_{panto} - Y_0)$
3. Quand le pantographe touche la caténaire, son accélération suit celle du point de contact, sauf si cette dernière excède l'accélération de l'oscillateur harmonique :  
 $y_{panto}(t) = y_{contact}(t) \Rightarrow \ddot{y}_{panto} = \min(-\frac{k}{m}(y_{panto} - Y_0), \ddot{y}_{contact})$

A noter que la courbe  $y_{panto}$  est seulement différentiable par morceaux : Quand le pantographe regagne le contact avec le câble, la première règle le force à changer soudainement de direction. Sur ces points,  $\ddot{y}_{panto}$  désigne la deuxième dérivation *du côté droite*.

Avec ces trois règles, on arrivera à modéliser le comportement du pantographe.

---

<sup>2</sup> Comme souvent en physique, nous utilisons la notation de Newton (dot notation)  $\dot{y} = \partial y / \partial t$  pour désigner des dérivations par rapport au temps. Donc  $\ddot{y} = \partial^2 y / \partial t^2$

## Un petit problème

Le modèle précédent pose un problème dans le cas de l'onde sinusoïdal : Il transforme pour ainsi dire le mur du son en tapis rouge. Plus la vitesse du train s'approche de la vitesse de l'onde, plus lente est l'oscillation du point de contact. Quand le train rattrape l'onde, l'onde est fixe par rapport au train et le point de contact n'oscille plus du tout. (La fonction  $y_{\text{contact}}(t) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \sin(2\pi f(-\Delta v \cdot t))$  devient constante pour  $\Delta v=0$ ).

En conséquence, il n'y a pas de défaut de captage à ce moment-là, tout au contraire. Je pense qu'en réalité, le défaut de captage lors du passage du mur de son arrive car la force que le pantographe exerce sur la caténaire augmente dans le cas  $\Delta v=0$  de plus en plus l'amplitude. Or, dans notre modèle, l'effet de cette force sur la vibration n'est pas simulé.

## Approche pour résoudre le problème

La solution choisie est de changer progressivement les paramètres de l'onde en fonction de la pression exercée sur la caténaire : Dans chaque frame<sup>3</sup> on additionne à notre onde une deuxième onde à petite amplitude, décalée tel qu'elle a une crête au-dessus du pantographe. Si les deux ondes ont la même fréquence, le résultat est toujours sinusoïdal et avec la même fréquence – seulement un peu décalé et avec une amplitude légèrement changée. Dans le cas  $\Delta v=0$  cela crée progressivement une crête de plus en plus haute au-dessus du pantographe. Vu qu'en plus on définit un maximum à  $y_{\text{panto}}$ , le pantographe se sépare de la caténaire dès que l'amplitude  $A$  excède ce maximum.

---

<sup>3</sup> Mise à jour des données et de l'affichage, quelques dizaines de fois par seconde

## Calcul des détails

Nous avons l'excitation non-pondérée à l'itération n, avec un décalage de phase  $\delta_n$

$$\bar{y}_{cat,n}(\xi, t) = A_n \cdot \sin(2\pi f(\xi - \Delta vt) + \delta_n)$$

Soit  $F = -k(y_{panto} - Y_0)$  la force verticale que le pantographe exerce sur le câble. Nous additionnons un petit cosinus pour simuler l'effet de la force F :

$$y_{force}(\xi, F) = \varepsilon \cdot F \cdot \cos(2\pi f\xi) = \varepsilon \cdot F \cdot \sin\left(2\pi f\xi + \frac{\pi}{2}\right)$$

où  $\varepsilon$  est une petite constante. Donc, si nous définissons  $\alpha = \delta_n - 2\pi f\Delta vt$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\bar{y}_{cat,n+1}(\xi, t) &= A_n \cdot \sin(2\pi f\xi + \alpha) + \varepsilon F \cdot \sin(2\pi f\xi + \beta) \\ &= \sqrt{(A_n \cdot \cos\alpha + \varepsilon F \cdot \cos\beta)^2 + (A_n \cdot \sin\alpha + \varepsilon F \cdot \sin\beta)^2} \\ &\quad \cdot \sin\left(2\pi f\xi + \operatorname{atan}\left(\frac{A_n \cdot \sin\alpha + \varepsilon F \cdot \sin\beta}{A_n \cdot \cos\alpha + \varepsilon F \cdot \cos\beta}\right)\right) \\ &= \sqrt{(A_n \cdot \cos\alpha)^2 + (A_n \cdot \sin\alpha + \varepsilon F)^2} \\ &\quad \cdot \sin\left(2\pi f\xi + \operatorname{atan}\left(\frac{A_n \cdot \sin\alpha + \varepsilon F}{A_n \cdot \cos\alpha}\right)\right) \\ &= A_{n+1} \cdot \sin(2\pi f(\xi - \Delta vt) + \delta_{n+1})\end{aligned}$$

avec

$$A_{n+1} = \sqrt{(A_n \cdot \cos\alpha)^2 + (A_n \cdot \sin\alpha + \varepsilon F)^2}$$

et

$$\delta_{n+1} = 2\pi f\Delta vt + \operatorname{atan}\left(\frac{A_n \cdot \sin\alpha + \varepsilon F}{A_n \cdot \cos\alpha}\right) = 2\pi f\Delta vt + \operatorname{atan}\left(\tan\alpha + \frac{\varepsilon F}{A_n \cdot \cos\alpha}\right)$$

A noter que nous utilisons la fonction  $\operatorname{Atan2}(p, q)$  de Unity3D qui gère le cas  $q = 0$ .